Sommario

Home Page		Equazioni con due incognite
Prerequisiti		Tabella
Obiettivi		Significato geometrico
Sistemi di equazioni equivalenti		Tipi di sistemi
Soluzioni di un sistema di equazioni		Sistemi scritti a forma normale
Metodo di sostituzione		Metodi di addizione e sottrazione
Metodo di Cramer		

Domande frequenti:

1) *dom.* cosa si intende per soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite?

Risp. **sono quelle coppie ordinate di valori che sostituite rispettivamente al posto delle incognite verificano entrambe le equazioni.**

2) dom. qual'è il significato geometrico di un'equazione lineare con due incognite?

Risp. è quello di una retta nel piano cartesiano i cui punti hanno coordinate che sostituite rispettivamente al posto delle incognite verificano l'equazione.

3) dom. qual'è il significato geometrico di soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite?

Risp. le soluzioni sono le coordinate del punto di intersezione delle rette rappresentate dalle due equazioni.

4) dom. come si possono classificare i sistemi di equazioni lineari esistono?

Risp. in sistemi determinati, indeterminati e impossibili.

5) dom. quando un sistema di equazioni si dice determinato?

Risp. quando esiste una sola soluzione, in questo caso le due rette individuate dalle equazioni sono incidenti.

6) dom. quando un sistema di equazioni si dice indeterminato?

Risp. quando esistono infinite soluzioni, in questo caso le due rette individuate dalle equazioni sono coincidenti.

7) dom. quando un sistema di equazioni si dice impossibile?

Risp. quando non esistonono soluzioni, in questo caso le due rette individuate dalle equazioni sono parallele.

8) dom. come sono i coefficienti dei termini di un sistema di due equazioni indeterminato scritto a forma normale?

Risp. i coefficienti delle incognite e i termini noti sono proporzionali.

9) dom. come sono i coefficienti dei termini di un sistema di due equazioni impossibile scritto a forma normale?

Risp. i coefficienti delle incognite sono proporzionali, ma non lo sono i termini noti.

10) dom. come sono i coefficienti dei termini di un sistema di due equazioni determinato scritto a forma normale?

Risp. i coefficienti delle incognite non sono proporzionali

11) dom. quando due sistemi di equazioni sono equivalenti?

Risp. quando hanno le stesse soluzioni.

Prerequisiti:

- **Equazioni di primo grado**

Obiettivi:

- **Saper riconoscere un sistema di equazioni lineari.**
- **Saper risolvere un sistema di equazioni lineari.**
- **Saper discutere un sistema di equazioni lineari.**
- **Saper impostare il sistema risolvente un sistema di equazioni lineari.**
- **Saper interpretare graficamente un sistema e le sue soluzioni**

Sistemi di equazioni lineari

Le soluzioni (o radici) di un'equazione è l'insieme dei valori che sostituiti al posto dell'incognita rendono il primo membro uguale al secondo. Se nell'equazione compaiono due incognite allora le soluzioni saranno coppie ordinate di numeri. Per ricavare le soluzioni dell'equazione 5x+6y=9 occorre isolare (o esplicitare) una delle due incognite, come se l'altra incognita fosse un numero.

Per esempio isolando la y si ottiene y=(-5x+9)/6, pertanto attribuendo un valore arbitrario alla x si ricava il corrispondente valore della y, quindi se x=1 allora y=(-5*1+9)/6=2/3. La coppia (1,2/3) sarà una soluzione del sistema.

Poichè la x viene scelta in infiniti modi infinite saranno le soluzioni.

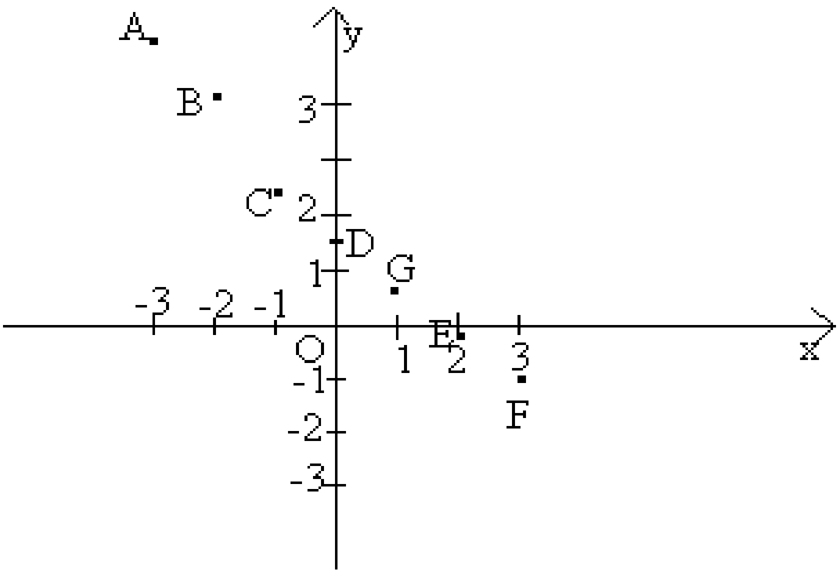
Si costruisce una tabella con due colonne, nella prima scegliamo in maniera arbitraria i valori della x, nell'altra il corrispondente valore della y

x	y	soluzioni dell'equazione

-3	(-5*(-3)+9)/6= 4	A(-3,4)
-2	(-5*(-2)+9)/6= 19/6	B(-2,19/6)
-1	(-5*(-1)+9)/6= 7/3	C(-1,7/3)
0	(-5*0+9)/6= 3/2	D(0,3/2)
1	(-5*1+9)/6= 2/3	G(1,2/3)
2	(-5*2+9)/6=-1/6	E(2,-1/6)
3	(-5*3+9)/6=-1	F(3,-1)

Si può giungere alle stesse conclusioni esplicitando rispetto alla x e scegliendo in maniera arbitraria i valori della y.

Le soluzioni possono essere viste come le coordinate di punti nel piano cartesiano. Dalla figura seguente si vede che esse sono i punti A,B,C,D,E,F,G appartenenti ad una retta



Un'equazione con due incognite rappresenta una retta nel piano cartesiano, le soluzioni sono coordinate dei punti della retta.

Si vuola ora determinare quella coppia di numeri la cui somma sia 25 e la cui differenza sia 13.
Il problema si risolve impostando due equazioni con due incognite

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

le coppie di numeri andranno quindi cercate fra quelle che sono soluzioni di entrambe le equazioni.

Poichè graficamente ciascuna equazione rappresenta una retta nel piano cartesiano, la coppia di numeri cercata è data dalle coordinate del punto di intersezione delle due rette.

Da ciò scaturisce la seguente definizione:

Def.Si chiama <u>soluzione</u> di un sistema di equazioni la coppia ordinata di numeri che sostituita al posto delle incognite verifica entrambe le equazioni.

Due sistemi che hanno le stesse soluzioni si dicono <u>equivalenti</u>

Se le rette che rappresentano le due equazioni sono parallele allora non vi saranno soluzioni, se invece le due

rette sono coincidenti allora si hanno infinite soluzioni. Pertanto si possono presentare tre distinti casi:

soluzioni	tipo di sistema
una	determinato
infinite	indeterminato
nessuna	impossibile

Un sistema di equazioni è scritta a forma normale se in ogni equazione le incognite compaiono nello stesso ordine al primo membro, mentre i termini senza incognita (termini noti) sono scritti al secondo membro

Un'equazione si può sempre scrivere a forma normale trasportando i termini con le incognite al primo membro gli altri al secondo.

Un sistema di equazioni lineari può essere risolto con diversi metodo.

Il metodo di sostituzione consiste nell'esplicitare una delle due equazioni rispetto ad un'incognita e sostituire alla stessa il valore trovato nell'altra equazione .

Quest'ultima diventa un'equazione ad una incognita che si risolve coi procedimenti conosciuti, infine si sostituisce il valore trovato nella prima.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-2y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=10 \\ y=-6+2x \end{cases} \text{si esplicita la II rispetto ad y} \quad \begin{cases} 2x+3(-6+2x)=10 \\ y=-6+2x \end{cases} \text{si sostituisce la y nella I} \quad \begin{cases} 2x-18+6x=10 \\ y=-6+2x \end{cases} \text{si effettuano le operazioni nella I}$$

$$\begin{cases} 8x=10+18 \\ y=-6+2x \end{cases} \text{si sommano i termini simili} \quad \begin{cases} 8x=28 \\ y=-6+2x \end{cases} \quad \begin{cases} x=28/8=7/2 \\ y=-6+2(7/2) \end{cases} \text{la x si sostituisce nella II} \quad \begin{cases} x=7/2 \\ y=1 \end{cases} \text{si ricava anche la y}$$

La sostituzione di un'incognita permette di ricondurci alla risoluzione di un'equazione ad un'incognita.

Si considerino le due uguaglianze a=b e c=d è evidente che si verifica a+c=b+d e a-c=b-d. Basta pensare a due bilance in equilibrio, allora sarà in equilibrio anche la bilancia i cui piatti sono costituiti dai pesi dati dalla somma o la differenza dei pesi dei piatti delle due bilance

Se in un sistema scritto a forma normale capita che una stessa incognita abbia nelle due equazioni coefficienti opposti, allora sommando membro a membro, cioè sommando i primi membri tra loro e i secondi membri tra loro e uguagliando, si ottiene un'equazione in cui un'incognita viene eliminata, quindi si può ricavare l'altra e procedere come nel metodo di sostituzione. Se invece una stessa incognita ha nelle due equazioni coefficienti opposti allora sottraendo membro a membra si giunge alla stessa conclusione precedente.

I suddetti procedimenti prendono chiamati rispettivamente metodo di addizione e sottrazione.

In generale però non capita di essere nella situazione esposta, infatti non sempre i coefficienti di una stessa incognita sono nelle due equazioni uguali oppure opposti. In questo caso si possono moltiplicare i membri delle due equazioni in modo da poter applicare il metodo di addizione o sottrazione.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-2y=12 \end{cases} \quad \text{la I si moltiplica per 2 la II per 3}$$

$$\begin{cases} 4x+6y=20 \\ \underline{12x-6y=36} \end{cases} \quad \text{sommando membro a membro si ottiene}$$

$$16x \quad =56 \quad \text{sostituendo una delle due equazioni con questa si ottiene}$$

$$\begin{cases} 2(7/2)+3y=10 \\ x=7/2 \end{cases} \quad \text{sostituendo la x nella I}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ y=7/2 \end{cases} \quad \text{si ricava anche la y}$$

Per risolvere un sistema di equazioni col metodo di Cramer occorre in primo luogo scrivere il sistema a forma normale, poi costruire tre determinanti delle matrici 2x2, così ottenute:

- **il determinante D della matrice formata dai coefficienti delle incognite**
- **il determinante Dx della matrice ottenuta sostituendo alla colonna dai coefficienti delle y la colonna dei termini noti**
- **il determinante Dy della matrice ottenuta da sostituendo alla colonna dai coefficienti delle x la colonna dei termini noti**

Si possono verificare i seguenti casi:

$$\begin{cases} \Delta \text{ diverso da } 0 \quad \text{sistema determinato} \\ \Delta=0 \quad \begin{cases} \Delta x,\Delta y \text{ diversi da zero} \quad \text{sistema impossibile} \\ \Delta x,\Delta y =0 \quad \text{sistema indeterminato} \end{cases} \end{cases}$$