

I logaritmi

Definizione
Proprietà
Equazioni logaritmiche
Equazioni esponenziali

Definizione

Supponiamo di voler trovare l'esponente a della potenza 3^a per ottenere 81 . Questa è un'operazione inversa della potenza. Anche i radicali sono operazioni inverse della potenza, in essi si deve ricavare la base, ora invece il problema è ricavare l'esponente.

La soluzione prende il nome di **logaritmo in base 3 di 81**. Più in generale si dà la seguente definizione:

Def.	Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ è l'esponente x che da dare ad a per ottenere b.
-------------	--

Pertanto le seguenti relazioni

$$x = \log_a b \quad \text{e} \quad a^x = b$$

sono equivalenti.

Il numero b deve essere positivo in quanto è uguale ad una potenza con base positiva.

Essendo il logaritmo una operazione inversa della potenza valgono le due uguaglianze

$$\log_a a^b = b \quad \text{e} \quad a^{\log_a b} = b$$

Si osservi che $\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$.

Proprietà

- Logaritmo del prodotto

Il logaritmo del prodotto di due o più numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori, cioè

Proprietà.	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
------------	------------------------------------

Dimostrazione

posto $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$ allora $a^x = b$ e $a^y = c$ quindi $bc = a^x a^y = a^{x+y}$

cioè $x+y = \log_a(bc)$ ma $x+y = \log_a b + \log_a c$ c.v.d.

- Logaritmo del potenza

Il logaritmo della potenza di un numero è uguale dell'esponente di tale potenza per il logaritmo della base

Proprietà.	$\log_a b^x = x \log_a b$
------------	---------------------------

Dimostrazione

posto $\log_a b = y$ perciò $a^y = b$ e $(a^y)^x = b^x$ ma $(a^y)^x = a^{yx} = a^{yx}$ perciò $\log_a b^x = yx$ essendo $y = \log_a b$ allora $\log_a b^x = x \log_a b$

c.v.d.

- Logaritmo del rapporto

Il logaritmo del rapporto di due o più numeri è uguale al logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore, cioè

Proprietà.	$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
------------	-------------------------------------

Dimostrazione

posto

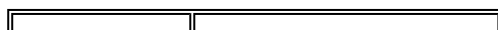
$$\log_a(b/c) = \log_a(bc^{-1}) =$$

per il logaritmo del prodotto è uguale a $= \log_a b + \log_a c^{-1}$

per il logaritmo della potenza $= \log_a b - \log_a c$ c.v.d.

- Cambiamento di base

Si vuole trovare la relazione che intercorre fra il logaritmo di un numero in una base a e il logaritmo dello stesso numero in un'altra base c .



Proprietà.	$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
------------	-------------------------------------

Dimostrazione

posto $y = \log_a b$ e $x = \log_c b$

allora $a^y = b$ e $c^x = b$ quindi $c^x = a^y$

calcoliamo il logaritmo in base a di entrambe i membri

otteniamo $\log_a c^x = \log_a a^y$

quindi applicando il logaritmo della potenza

otteniamo $x \log_a c = y \log_a a$ cioè $x \log_a c = y$

sostituendo a x ed y le relazioni iniziali si ha

$$\log_c b \cdot \log_a c = \log_a b$$

perciò si ottiene la regola del cambiamento di base del logaritmo.

Proprietà.	$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$
------------	--