Indice matematica

La circonferenza nel piano cartesiano

Prerequisiti

- **Saper calcolare la distanza tra due punti**
- **conoscere e saper calcolare l'equazione di una retta**
- **saper risolvere sistemi di I e II grado;**

Obiettivi

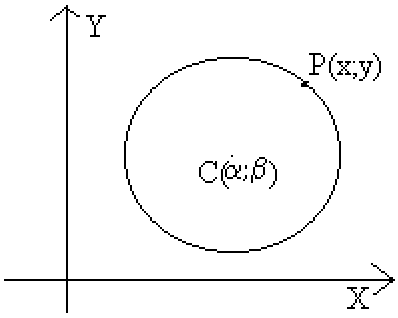
- **Determinare l'equazione della circonferenza dati centro e raggio o altre condizioni sufficienti;**
- **riconoscere l'equazione di una circonferenza**
- **saper calcolare le intersezioni tra una retta e una circonferenza;**
- **saper ricavare le rette tangenti passanti per un punto di una circonferenza oppure per un punto esterno ad essa.**

Definizione

La circonferenza è costituita da tutti e i soli punti che abbiano una stessa distanza prefissata da un punto detto centro. Il segmento che unisce un punto generico con il centro si chiame raggio,per definizione la lunghezza di questo segmento è costante.

Equazione generica di una circonferenza

Indicato con C(a,b) il centro della circonferenza e con P(x,y) un punto generico



si ha $\overline{PC}^2=(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

La circonferenza ha quindi equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. **Sviluppando i quadrati si ottiene** $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$

posto $a=-2a;\ b=-2b;\ c=a^2+b^2-r^2$

L'equazione generica di una circonferenza diventa

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Centro raggio di una circonferenza

Data l'equazione generica della circonferenza

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

ci si pone il problema di determinare il suo centro C(a,b) ed il suo raggio r.

Dalle relazioni precedenti si ricava

$$\alpha=-\frac{a}{2} \quad e \quad \beta=\frac{-b}{2}$$

perciò

$$r^2=\alpha^2+\beta^2-c=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

da cui

$$r=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

Posizioni reciproche fra retta e circonferenza

Una retta rispetto ad una circonferenza può essere:

- **esterna, la retta non interseca la circonferenza;**
- **secante, la retta interseca la circonferenza in due punti distinti;**
- **tangente, la retta tocca la circonferenza in un solo punto.**

Per determinare i punti di intersezione tra una retta ed una circonferenza occorre risolvere il sistema formato dall'equazione della circonferenza e della retta.
Si ottiene un sistema di secondo grado e a seconda delle soluzioni si presentano tre casi

1. **soluzioni immaginarie, la retta è esterna.**
2. **soluzioni reali e distinte, la retta è secante la circonferenza;**
3. **soluzioni reali e coincidenti, la retta è tangente la circonferenza;**

Supponiamo di dover trovare la tangente alla circonferenza in un punto P(x0,y0).
La tangente è determinata una volta ricavato il suo coefficiente angolare, infatti l'equazione ha la forma y-y0=m (x-x0) *(retta di dato coefficiente angolare passante per un punto di dato*). In altre parole la tangente è una particolare retta fra le infinite appartenenti al fascio di rette y-y0=m(x-x0) di centro (x0,y0).
Esistono due procedimenti per ricavare m:

1. **Si risolve il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e l'equazione del fascio di centro P(x0,y0) che dipende dal parametro m.**
   Se la retta è tangente il sistema deve avere redici reali e coincidenti, quindi il discriminante dell'equazione di secondo grado deve valere zero. Si uguaglia il discriminante ottenendo un'equazione in cui m è l'incognita.
   La soluzione dell'equazione rappresenta il coefficiente angolare dlla tangente;
2. **Si utilizza una proprietà della circonferenza: la tangente ha distanza dal centro uguale al raggio, pertanto m si ricava come soluzione dell'equazione in cui si uguaglia la distanza della generica equazione del fascio col raggio della circonferenza**

Determinazione equazione della circonferenza

L'equazione di una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ dipende dai tre parametri a,b,c di, conseguenza per ricavare l'equazione dobbiamo avere tre relazioni indipendenti fra loro i parametri.
Si possono verificare diversi casi:

- **centro $C(a,b)$ e raggio r**
  - **l'equazione è $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$**
- **tre punti $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ appartenenti alla circonferenza**
  - **si applica la condizione di appartenenza a ciascuno dei tre punti, cioè si sostituiscono le coordinate all'equazione generica della circonferenza ottenendo così tre equazioni in tre incognite, le soluzioni del sistema ci danno i valori di a, b, c.**
- **centro $C(a,b)$ e un punto $A(x_0,y_0)$**
  - **a e b si ricavano dalle relazioni $a=-2a$ e $b=-2b$ mentre c si ricava imponendo la condizione del punto**

A e risolvendo l'equazione.

- **due punti appartenenti alla circonferenza e la tangente in uno di essi**
  - **si ottengono due equazioni nelle incognite a e b imponendo la condizione di appartenenza per i due punti a ciascuno dei tre punti**