Equazioni di secondo grado

Introduzione

Si supponga di dover trovare quel numero il cui quadrato sommato al suo doppio sia uguale a 63.
Indicato con x il numero cercato, il problema ci conduce a trovare la radice dell'equazione $x^2+2x=63$
Poiché l'incognita compare con esponente massimo uguale a 2, si tratta di risolvere un'equazione di secondo grado.
Applicando le proprietà delle equazioni è sempre possibile ricondurre un'equazione di secondo grado nella cosìdetta forma normale

$$Ax^2+Bx+C=0$$

Casi particolari

Poiché il termine di secondo grado deve essere presente A non può annullarsi, quindi possono presentarsi i seguenti casi:

B=0 e C=0	**equazione monomia**
C=0	**equazione spuria**
B=0	**equazione pura**

Equazione monomia
L'equazione ha la forma

$$Ax^2=0$$

Pertanto $x^2=0/A$ cioè $x=0$, di conseguenza un'equazione monomia ha una radice nulla

Equazione spuria

L'equazione ha la forma

$$Ax^2+Bx=0$$

Posto x in evidenza si ottiene $x(Ax+B)=0$ essendo un prodotto uguale a zero allora, per la legge di annullamento del prodotto, almeno uno dei due fattori è zero,cioè si ha

$$x=0 \text{ o } Ax+B=0 .$$

Si è ricondotta l'equazione di secondo grado alla risoluzione di due equazioni di primo, di cui una ha soluzione nulla.
L'altra soluzione è $x=-B/A$.
In questo abbiamo una equazione con due soluzioni sicuramente distinte

Equazione pura

L'equazione ha la forma

$$Ax^2+C=0$$

L'equazione si può scrivere nella forma $Ax^2=-C$

Pertanto $x^2=-C/A$. I primo membro è positivo poiché è un quadrato allora deve esserlo anche il secondo membro. Se A e C sono concordi il secondo membro è negativo in quanto la frazione è preceduta dal segno meno, di conseguenza non si hanno radici, reali essendo il primo membro positivo. Se invece A e C sono discordi si hanno due radici reali opposte che si ottengono

$$x = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$$

Se C=0 si può porre in evidenza si ottiene $x(Ax+B)=0$ essendo un prodotto uguale a zero allora, per la legge di annullamento del prodotto, almeno uno dei due fattori è zero,cioè si ha

$x=0$ o $Ax+B=0$.

Si è ricondotta l'equazione di secondo grado alla risoluzione di due equazioni di primo, di cui una ha soluzione nulla.

L'altra soluzione è $x=-B/A$.

In questo abbiamo una equazione con due soluzioni sicuramente distinte.

Equazione completa

Se B e C sono diversi da zero l'equazione si dice completa, per risolverla occorre applicare la seguente formula risolutiva

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

che si può riassumere nella forma

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Il radicando b^2 -4a*c della radice quadrata si chiama discriminante dell'equazione.

Poiché il radicando di una radice quadrata è un numero reale se non è negativo ne consegue che l'equazione ha radici reali se il discriminante è positivo o nullo, diversamente le radici sono immaginarie

---

Relazioni tra coefficienti e radici dell'equazione

Se le radici sono reali e ne facciamo la somma x_1+x_2 dalla dalla formula risolutiva otteniamo

$$\boxed{s=x1+x2=-b/a}$$

cioè $b=-a(x1+x2)$

invece il prodotto vale

$$\boxed{p=x1\cdot x2=c/a}$$

cioè $c=a(x1\cdot x2)$

Queste relazioni permettono in particolari casi di ricavare le soluzioni di un'equazione di secondo grado senza applicare la formula risolutiva.

Infatti basta cercare quei numeri le cui somme ed il prodotti corrispondano ai numeri ottenuti mediante le relazioni.

Occorre notare che tali numeri sono facilmente ricavabili quando le soluzioni sono numeri interi.

Scomposizione di un'equazione di secondo grado

Se un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ammette per soluzioni x_1 ed x_2, allora sostituendo in b e c le precedenti relazioni l'equazione diventa

$$ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2=0$$

ossia

$$ax^2-ax_1x-ax_2x+ax_1\cdot x_2=0$$

ponendo a in evidenza diventa

$$a(x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2)=0$$

applicando la scomposizione a fattore parziale diventa

$$a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=0$$

ossia

$$\boxed{a(x-x_1)(x-x_2)=0}$$

Se il discriminante dell'equazione è negativo allora il trinomio non si può scomporre.

Regola di Cartesio

Si considerino i coefficienti a, b, c di un'equazione di secondo grado avente radici reali, si dice che si ha una permanenza se due coefficienti consecutivi sono concordi, si ha una variazione se sono discordi.

La regola di Cartesio permette di ricavare i segni delle soluzioni di un'equazione di secondo grado essa afferma:

In un'equazione di secondo grado avente radici reali il numero di di soluzioni negative è uguale al numero di permanenze, mentre il numero di soluzioni positive è uguale al numero di variazioni.

Esempio: $x^2-5x+6=0$, siccome $a=1$ $b=-5$ $c=6$ ci sono due variazioni si hanno due soluzioni positive infatti esse sono $x_1=2$ e $x_2=3$.

Attenzione a regola di Cartesio si applica solo se il discriminante non è negativo, infatti in tal caso le radici sono immaginarie.
